Álgebra linear

Universidade Pedagógica de Maputo

Folha 3bis. subespaços afims, referências afines

1. Seja P um ponto de $\mathbb{R}^d$ e $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ três vetores de $\mathbb{R}^d$. Definimos o subespaço afim $F = P + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$.

   Decida qual das seguintes opções estão referências afines de F:

   (a) $P, \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_1\}$

   (b) $P + \mathbf{u}_1, \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$

   (c) $P + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3\}$

   (d) $P + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$

2. Em $\mathbb{R}^4$ Os vetores são considerados:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \rho \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \rho \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \rho \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   e o ponto

$$P = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho \\ \rho \end{bmatrix}$$

   onde $\rho \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.Encontre a dimensão e uma base do subespaço afim

$$P + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle .$$

3. Para vetores e o ponto do exercício anterior e o valor do parâmetro $\rho = 2$ a referência afim $P, \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ de $\mathbb{R}^4$ é considerada.Encontre as coordenadas nesta base de um ponto genérico $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

4. Encontre a dimensão e uma referência afim de $\mathbb{R}^4$ formado por todas as soluções do sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases}$$

5. Repita o exercício anterior para o subespaço:

$$\{(x, y, z, w) : x - w + z = -1\}.$$

6. Encontre uma referência e calcule a dimensão do subespaço afim F de $\mathbb{R}^2$ que contém o ponto P e cujo espaço de endereço é gerado por vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Encontre um sistema de equações para que o conjunto de todas as suas soluções coincide com F.

7. Repita o exercício anterior se F for:

(a) O subespaço afim de $\mathbb{R}^3$ contendo ponto P e cujo espaço de direção é gerado por vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix};$$

(b) O subespaço afim de $\mathbb{R}^4$ contendo ponto P e cujo espaço de direção é gerado por vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix};$$

(c) O subespaço afim de $\mathbb{R}^4$ contendo ponto P e cujo espaço de direção é gerado por vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

8. Se $P, \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_4}\}$ é uma referência de um subespaço afim F de $\mathbb{R}^d$, pode ser $P + \mathbf{v}_1, \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_7}\}$ também uma referência de F?Justifique a resposta.

9. Se $P, \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ é uma referência de um subespaço afim de $\mathbb{R}^d$, é possível que o ponto $P + \mathbf{e_1}$ seja igual ao ponto $P - \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$?Justifique a resposta.

10. Determine se os seguintes subespaços afines são iguais

$$F_1 = (1, 0, 0) + \langle (1, 1, 0), (1, 2, 0) \rangle \quad F_2 = (2, 0, 0) + \langle (1, 3, 0), (2, 2, 0) \rangle .$$

E o seguinte?

$$F_1 = (1, 0, 0) + \langle (1, 1, 0), (1, 2, 0) \rangle \quad F_2 = (0, 0, 1) + \langle (1, 3, 0), (2, 2, 0) \rangle .$$

11. Seja F o subespaço afim de $\mathbb{R}^d$ gerado por pontos P_1, P_2, P_3.Qual pode ser a dimensão de F?Justifique a resposta.

12. Consideramos os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$:

$$P = (1, 0, 0), \mathbf{e_1} = (1, 1, 1), \mathbf{e_2} = (1, 1, 2), \mathbf{e_3} = (1, 2, 3), Q = (6, 9, 14).$$

Mostre que $P, \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ forma uma referência de $\mathbb{R}^3$ e encontre as coordenadas de Q nessa referência.

13. determinar o valor dos parâmetros a e b, de modo que o ponto $(1, 0, a, b)$ pertence ao subespaço afim de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos pontos $(1, 4, -5, 2)$, $(0, 3, 0, 2)$ e $(1, 2, 3, -1)$.

14. Definimos três pontos $P_1 = (1, 0, 0, 0)$, $P_2 = (1, 1, 0, 2)$ e $P_3 = (1, -1, 2, 0)$ de $\mathbb{R}^4$. É solicitado a encontrar uma referência afim $P, \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ de $\mathbb{R}^4$, de modo que $P = P_1$, $\mathbf{e_1} = \overrightarrow{P_2P_1}$ e $\mathbf{e_2} = \overrightarrow{P_3P_2}$.

15. Em $\mathbb{R}^3$, os pontos $(1, 1, a), (1, a, 1), (a, 1, 1)$ são considerados.Estudo, dependendo de a, a dimensão do subespaço afim gerado por esses pontos.

16. Encontre uma referência afim para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ cujas equações paramétricas são

$$x_1 = 2 + \lambda + \alpha + \beta \quad x_2 = \lambda - \alpha + 3\beta \quad x_3 = -1 + \lambda + 2\alpha \quad x_4 = 2\lambda + 3\alpha + \beta$$

onde α, β, λ eles levam todos os valores reais possíveis.

Qual é a sua dimensão?

17. O ponto $P = (2, 4, 2, 0)$ pertence ao próximo subespaço afim de $\mathbb{R}^4$?

$$V = \{(x, y, z, t) : x - y + z - t = 0, y - z = 2\}$$

Calcule uma referência do referido subespaço.Qual é a sua dimensão?

18. Existem valores de x E y, de modo que o ponto $(1, 2, x, y)$ pertence ao subespaço afim gerado por pontos $(1, 1, 0, 2)$ e $(1, 1, 2, 3)$?

19. Consideramos o seguinte conjunto de pontos de $\mathbb{R}^4$.

$$(1,3,0,-1),(2,-1,1,1),(1,2,1,0),(0,3,0,-1),(0,0,0,0),(2,2,1,0).$$

Qual é a dimensão do subespaço afim gerado por esses pontos? Encontre um subconjunto do conjunto anterior que gera o mesmo subespaço afim.

20. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz, de dimensões $m \times n$ e $m \leq n$.Nós sabemos disso:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1 (j \neq i)}^{m} |a_{ij}|$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Verifique se o sistema de equações

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

define um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ da dimensão $n - m$, para qualquer vetor $\begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$.

21. Encontre todos os pontos $P \in \mathbb{R}^n$ que resolvem o sistema de equações $A \cdot (P - P_0) = \mathbf{b}$, usando os seguintes vetores como colunas de A:

$$\mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

e

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Dê uma interpretação geométrica do resultado.

22. Como o exercício anterior, mas com

$$\mathbf{w_1} = (1,2,0)^T, \mathbf{w_2} = (2,5,0)^T, \mathbf{w_3} = (0,0,2)^T, \mathbf{w_4} = (0,0,0)^T,$$

e

$$P = (1,0,0), \mathbf{b} = (0,1,0)^T.$$

23. Seja V o espaço vetorial que forma todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com operações usuais.As funções definidas da seguinte maneira são consideradas:

$$\phi_1(t) = \sin(t) \quad \phi_2(t) = \cos(t) \quad \phi_3(t) = \sin^2(t) \quad \phi_4(t) = \cos^2(t)$$

Lembramos que já vimos em um exercício anterior de que essas quatro funções são linearmente independentes.Seja F o conjunto de funções f que são uma combinação linear das funções acima e também satisfazem $f(0) = 1$. Mostrar que F é um subespaço afim, calcule sua dimensão e encontre uma referência de F.

24. Seja $\mathcal{P}_n(x)$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a n. Lembramos de um exercício anterior de que sua dimensão é $n+1$. Definimos o conjunto F formado por polinômios p como $p(1) = 0$. Mostrar que F é o subespaço afim de $\mathcal{P}_n(x)$ gerado pelos "pontos"

$$p_0(x) = 0, p_1(x) = x - 1, \ldots p_n(x) = x^n - 1.$$

25. Calcule as coordenadas dos polinômios $p_1(x) = 1 + 3x - 4x^2$, $p_2(x) = -2 + 2x^2$ e $p_3(x) = 3 + 3x + x^2$ na referência anterior (para $n = 2$).Que dimensão o subespaço afim gerado por eles tem?E se adicionarmos o polinômio $p_4(x) = x^2$?