Álgebra linear
Universidade Pedagogica de Maputo

Folha 4. Projeção ortogonal. Famílias ortogonais e ortogonais.

1. Seja $P_E\mathbf{v}$ a projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{v}$ em um subespaço E de $\mathbb{R}^d$.Verifique isso:
$$\mathbf{w} \cdot P_E\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot P_E\mathbf{w}.$$
¿É verdade em geral que $P_E\mathbf{w} \cdot P_E\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$?Raciocine sua resposta.

2. Definimos alguns subespaços vectoriais:
   (a) $E := \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$.
   (b) $F := \{(x, y, z, t) : x - y = x + 2z = 0\}$.
   (c) $G := \{(x, y, z, t) : x + y - 3t = 0\}$.

   (a) Encontre equações para os suplementares ortogonais dos subespaços anteriores.
   (b) Calcule a projeção ortogonal de vetores $(1, 0, 1)$, $(3, -3, 3)$, $(1, 1, 0)$ em Subespaço E.
   (c) Calcule a projeção ortogonal de vetores $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, -4, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(2, -2, 4, 1)$ nos subespaços F e G do exercício anterior.
   (d) Calcule a projeção ortogonal de F em G e o de G em F.
   (e) Para que valores do parâmetro α é o vetor $(0, 0, 0, \alpha)$ ortogonal para subespaço F?

3. Encontre uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ para que o subespaço gerado por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ coincide com o subespaço gerado por vetores:
$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)\,, \quad \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0)\,.$$

4. Encontre uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ para que o subespaço gerado por $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ coincide com o subespaço gerado por vetores:
$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)\,, \quad \mathbf{v}_2 = (2, 1, 0)\,.$$

5. Calcule a projeção ortogonal no subespaço
$$E := \{(x, y, z, t) : x - y + z = 2y + z - t = 0\} \subset \mathbb{R}^4$$
de:

(a) O vetor $(1, 2, 0, 0)$.

(b) A linha gerada por $(-1, 1, 0, 1)$.

(c) O subespaço $F := \{(x, y, z, t) : x - y + z = t = 0\}$.

6. Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{v}_1 := (0, 2, 2, 1)\,, \quad \vec{v}_2 := (0, 2, -2, 1) \quad \vec{v}_3 := (1, 1, 0, 0)\,.$$

Encontre todos os vetores da forma $\vec{v}_3 + \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2$ que são ortogonais para $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ simultaneamente. Esses vetores formam um subespaço vetorial? Justifique sua resposta.

7. Dado um valor $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos o subespaço vetorial E_α de $\mathbb{R}^4$ dado pelas equações:

$$x - \alpha y - z + \alpha t = 0, \qquad x - z = 0.$$

(a) Obtenha algumas equações para $E_\alpha^\perp$, o Suplementar ortogonal de E_α.

(b) ¿Há algum valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para quem a dimensão de $E_\alpha^\perp$ é igual a um? Em caso afirmativo, calcule esse valor.

8. Encontre algumas equações para a linha de $\mathbb{R}^3$ o que resulta da aplicação da projeção ortogonal no plano:

$$x + y + z = 0,$$

para a linha dada por:

$$x + 2z = y = 0.$$

9. Encontre a solução de mínimos quadrados:

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

10. Encontre a equação da linha $y = Ct + D$ que melhor se ajusta as medidas:

$$\begin{aligned} y_1 &= 4, \quad t_1 = -2, \\ y_2 &= 1, \quad t_2 = 0, \\ y_3 &= 3, \quad t_3 = -1, \\ y_4 &= 0, \quad t_4 = 2, \end{aligned}$$

    No sentido do mínimos quadrados, ou seja: $\sum_{i=1}^{4} \left(y\left(t_i\right) - y_i\right)^2$ é mínimo entre todos os linhas planas.

11. Repita o exercício anterior para medidas $y = 4, 2, -1, 0, 0$ respectivamente nos momentos do tempo $t = -2, -1, 0, 1, 2$.

12. Se, em vez de uma linha, queremos ajustar os dados para um parábola $y = Ct^2 + Dt + E$, representa o problema de mínimos quadrados resultando com os dados no exercício anterior.

13. Consideramos os seguintes pontos em $\mathbb{R}^3$:

$$(1, 1, 3), \quad (2, 1, 5), \quad (0, 3, 6), \quad (0, 0, 0).$$

    Existe algún plano que passa por esses quatro pontos? Se não é possível, encontre a equação $z = Cx + Dy + E$ do plano que melhor ajusta esses dados no sentido de mínimos quadrados.