Determinante

Pablo Angulo, Fabricio Macià

Universidade Pedagogica de Maputo

Fórmula de Leibniz para Determinante

Já vimos à fórmula de Leibniz:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.$$

Está bem para provar alguns resultados teóricos. Não para calcular determinantes.

determinante $d \times d$

O determinante $|A|$ de uma matriz quadrada A $d \times d$ pode ser calculada
Desenvolvendo o determinante por uma linha

Menor de un elemento

O **menor do elemento** i, j **na matriz** A é o determinante do resultado da submatriz de tomar A, mas eliminar a linha i e a coluna j.
Denotamos para $A_{i,j}$ (A capital em vez de minúsculas)

determinante $d \times d$

O determinante $|A|$ de uma matriz quadrada A $d \times d$ pode ser calculada *Desenvolvendo o determinante por uma linha*

Menor de un elemento

O **menor do elemento** i, j **na matriz** A é o determinante do resultado da submatriz de tomar A, mas eliminar a linha i e a coluna j.
Denotamos para $A_{i,j}$ (A capital em vez de minúsculas)

Cofactor de un elemento

O **cofator do elemento** i, j **na matriz** A é o produto do menor A_{ij} pelo número $(-1)^{i+j}$ (esse número leva apenas os valores 1 e -1):
$C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$.

determinante $d \times d$

O desenvolvimento da determinante pela primeira linha é:

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1d}C_{1d}$$

Observação: Esta fórmula da lugar a um procedimento **recursivo** do cálculo: define o determinante para matrizes $d \times d$ dependendo da cálculo do determinante para matrizes $(d-1) \times (d-1)$.

determinante $d \times d$

O desenvolvimento da determinante pela primeira linha é:

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1d}C_{1d}$$

Observação: Esta fórmula da lugar a um procedimento **recursivo** do cálculo: define o determinante para matrizes $d \times d$ dependendo da cálculo do determinante para matrizes $(d-1) \times (d-1)$.
Também podemos desenvolver por outra linha (linha j):

$$|A| = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jd}C_{jd}$$

determinante $d \times d$

O desenvolvimento da determinante pela primeira linha é:

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1d}C_{1d}$$

Observação: Esta fórmula da lugar a um procedimento **recursivo** do cálculo: define o determinante para matrizes $d \times d$ dependendo da cálculo do determinante para matrizes $(d-1) \times (d-1)$.
Também podemos desenvolver por outra linha (linha j):

$$|A| = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jd}C_{jd}$$

Ou por uma coluna (a coluna k):

$$|A| = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{dk}C_{dk}$$

determinante $d \times d$

O desenvolvimento da determinante pela primeira linha é:

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1d}C_{1d}$$

Observação: Esta fórmula da lugar a um procedimento **recursivo** do cálculo: define o determinante para matrizes $d \times d$ dependendo da cálculo do determinante para matrizes $(d-1) \times (d-1)$.
Também podemos desenvolver por outra linha (linha j):

$$|A| = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jd}C_{jd}$$

Ou por uma coluna (a coluna k):

$$|A| = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{dk}C_{dk}$$

Este procedimento de cálculo pode ser prático nas algumas situações especiais.

Calcule o determinante

O método de Gauss não serve diretamente para calcular o determinante, *mas quase*.Vamos ver como os três *operações elementares* afetam o determinante uma matriz quadrada A:

- A troca da posição duas linhas altera o sinal determinante.
- Multiplique uma linha por um número diferente de zero multiplica o determinante pelo mesmo número.
- Adicione uma linha um múltiplo de outra deixa o determinante invariante.

Calcule o determinante

O método de Gauss não serve diretamente para calcular o determinante, *mas quase*.Vamos ver como os três *operações elementares* afetam o determinante uma matriz quadrada A:

- A troca da posição duas linhas altera o sinal determinante.
- Multiplique uma linha por um número diferente de zero multiplica o determinante pelo mesmo número.
- Adicione uma linha um múltiplo de outra deixa o determinante invariante.

Isso segue um procedimento para calcular o determinante de uma matriz quadrada inspirada no método Gauss.

Procedimento para calcular o determinante

1. Aplique o método Gauss, mas observando as alterações no determinante, até atingir uma matriz triangular.
2. O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal (é um exercício fácil).

Procedimento para calcular o determinante

1. Aplique o método Gauss, mas observando as alterações no determinante, até atingir uma matriz triangular.
2. O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal (é um exercício fácil).

Vejamos um exemplo específico

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

procedimento para calcular o determinante

Vamos permitir que as linhas 1 e 2

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

procedimento para calcular o determinante

Vamos permitir que as linhas 1 e 2

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Adicionamos linha 1 à linha 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

procedimento para calcular o determinante

Vamos permitir que as linhas 1 e 2

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Adicionamos linha 1 à linha 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Trocamos a segunda e a terceira fila

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Propriedades determinantes importantes

Vamos A e B matrizes $d \times d$ e r um número real.

- $\det(rA) = r^d \det(A)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Propriedades determinantes importantes

Vamos A e B matrizes $d \times d$ e r um número real.

- $\det(rA) = r^d \det(A)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- O primeiro segue-se da multilinearidade

Propriedades determinantes importantes

Vamos A e B matrizes $d \times d$ e r um número real.

- $\det(rA) = r^d \det(A)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- O primeiro segue-se da multilinearidade
- O segundo segue-se da fórmula de Leibniz

Propriedades determinantes importantes

Vamos A e B matrizes $d \times d$ e r um número real.

- $\det(rA) = r^d \det(A)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- O primeiro segue-se da multilinearidade
- O segundo segue-se da fórmula de Leibniz
- O terceiro segue-se facilmente pelo argumento seguinte: a função $A \to det(A \cdot B)/det(B)$ é multilinear, alternante e normalizada, então...

Propriedades determinantes importantes

Vamos A e B matrizes $d \times d$ e r um número real.

- $\det(rA) = r^d \det(A)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- O primeiro segue-se da multilinearidade
- O segundo segue-se da fórmula de Leibniz
- O terceiro segue-se facilmente pelo argumento seguinte: a função $A \to det(A \cdot B)/det(B)$ é multilinear, alternante e normalizada, então...
- O último é facilmente seguido pelo terceiro.

Caracterização de matrizes regulares

Vamos lembrar o seguinte resultado:

Uma matriz quadrada A $d \times d$ tem inversa se e somente se puder ser transportada por operações elementares para outra matriz triangular com elementos não nulos na diagonal.

Agora o seguinte resultado é evidente:

Uma matriz quadrada A $d \times d$ tem inversa se e somente se seu determinante for *sem nulo*.