Algebra linear

Universidade Pedagogica de Maputo

Folha 5. Transformações lineares.

1. Das seguintes funções, quais são as transformações lineares?Justifique sua resposta.

   (a) A transformação $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida da seguinte maneira.$T(a, b, c, d)$ é o vetor do plano dado por

   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   (b) $S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definido por

   $$S(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{b},$$

   onde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ é um vetor fixo.

   (c) $R : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definido por: $R(a, b, c, d)$ é o vetor formado pelas entradas da matriz:

   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (d) $Q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que aos coeficientes de uma polinonia $p(x)$ de grau no máximo três associam os coeficientes do polinômio $p(x) + 1$.

2. Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido da seguinte maneira

   $$T(u_i) = w_i \quad i = 1, 2, 3$$

   Sendo

   $$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   e

   $$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Calcule a matriz associada à transformação T.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida pelas seguintes condições

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $T(\mathbf{x})$ para tudo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, dependendo de suas coordenadas na base canônica.

4. Raciocinar se pode haver ou não alguma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que esteja em conformidade:

$$T(1,1,0) = (2,2,2), \quad T(0,0,1) = (1,0,1), \quad T(1,1,-2) = (0,0,0).$$

Razão se pode ou não haver alguma transformação linear que atenda a essas outras condições:

$$T(1,1,0) = (2,2,2), \quad T(0,0,1) = (1,0,1), \quad T(1,1,-2) = (0,2,0).$$

5. mostram que qualquer transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ se encontra $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $T(-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$.

6. Lembre-se de que o núcleo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é o conjunto formado por esses vetores $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ que se encontram $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.Em inglês, o núcleo é chamado *kernel*;Vamos nos referir ao núcleo de T por $\ker T$.

   (a) mostram que $\ker T$ é sempre um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$.

   (b) Coloque exemplos de transformações lineares T_0, T_1, T_2, T_3 de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$, cujo núcleo é um subespaço vetorial de dimensão 0, 1, 2 e 3, respectivamente.

7. É chamado de alcance ou imagem de um aplicativo linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ao conjunto de vetores $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ é obtido aplicando T a algum vetor:

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}.$$

A imagem ou intervalo de uma aplicação linear é geralmente denotado $\operatorname{Im} T$ ou $\operatorname{Ran} T$, ou também $T(\mathbb{R}^d)$.

   (a) mostram que a imagem de um aplicativo linear é sempre um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$.

   (b) Dê exemplos de transformações lineares T_0, T_1, T_2, T_3 de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$, cuja imagem é um subespaço vetorial de dimensão 0, 1, 2 e 3, respectivamente.

8. Calcule a imagem e o núcleo da transformação linear associada à matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Seja E um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$ e $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ uma transformação linear.O todo $T(E)$ é o formado pelos vetores $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ que são obtidos aplicando T a algum vetor de E.Em outras palavras:

$T(E) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d :$ existe pelo menos um vetor $\mathbf{u}$ que está em E tal que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}\}$.

mostra que $T(E)$ é um subspace vetorial de $\mathbb{R}^d$.

10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um aplicativo linear definido por

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

Halle:

- Uma matriz A que se encontra $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
- A dimensão dos subspaços vetoriais V_i e $T(V_i)$, bem como um sistema de equações satisfeitas pelos vetores de $T(V_i)$ nos seguintes casos:

1.) $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$

2.) $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0 \right\}$

3.) $V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a transformação linear que para os coeficientes (a_0, a_1, a_2) de um polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ associa o vetor

$$(p(0), p(1), p(2), p(3)).$$

Encontre a matriz da referida aplicação linear.